Université Paris-Diderot **25 novembre 2014**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Section C

Corrigé du Devoir surveillé 2

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels suivants :

$$V = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2, v_3\}), \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Donner la définition de dimension d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^4$. Quelles valeurs peut assumer $\dim V$?

La dimension $\dim V$ d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^4$ est le cardinal de n'importe quelle base de V (on impose $\dim V = 0$ si $V = \{0\}$). Les valeurs possibles pour $\dim V$ sont $0, 1, 2, 3, 4$.

(b) Considérons la famille (v_1, v_2, v_3) dans $\mathbb{R}^4$. Est-ce une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$? Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?

i) La famille (v_1, v_2, v_3) est libre si et seulement si on a la propriété suivante :

$$\text{Pour } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

ce qui équivaut , en utilisant les coordonnées des vecteurs, à :

le système (E) $\begin{cases} 3x_1 & - & 7x_2 & - & 9x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 11x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{cases}$ a pour unique solution $(0, 0, 0)$.

On a :

$$(E) \Leftrightarrow (E') \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (L'_1) = (L_4) \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 & (L'_2) = (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + 11x_3 = 0 & (L'_3) = (L_3) \\ 3x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 0 & (L'_4) = (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (E'') \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (L''_1) = (L_1) \\ 2x_2 + 6x_3 = 0 & (L''_2) = (L'_2) + (L'_1) \\ 3x_2 + 9x_3 = 0 & (L''_3) = (L'_3) - 2(L'_1) \\ -4x_2 - 12x_3 = 0 & (L''_4) = (L'_4) - 3(L'_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (E^{(3)}) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (L^{(3)}_1) = (L''_1) \\ x_2 + 3x_3 = 0 & (L^{(3)}_2) = \frac{1}{2}(L''_2) \\ 0 = 0 & (L^{(3)}_3) = \frac{1}{3}(L''_3) - \frac{1}{2}(L''_2) \\ 0 = 0 & (L^{(3)}_4) = \frac{1}{4}(L''_4) - \frac{1}{2}(L''_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (E^{(3)}) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (L^{(3)}_1) \\ x_2 + 3x_3 = 0 & (L^{(3)}_2) \end{cases}$$

Le système $(E^{(3)})$ est un système échelonné avec deux équations et trois inconnues.

Ila donc deux inconnues principales et une variable libre. Ce système admet donc une infinité de solutions, et en particulier des solutions non nulles. Ainsi il existe une infinité de triplets $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ et $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$. On en conclut que la famille (v_1, v_2, v_3) est liée.

ii) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, dont toute famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ est formée d'au moins quatre vecteurs. Or la famille (v_1, v_2, v_3) ne compte que trois vecteurs et ne peut donc être génératrice de $\mathbb{R}^4$.

iii) La la famille (v_1, v_2, v_3) n'est ni libre, ni génératrice de $\mathbb{R}^4$, et n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Trouver une base de V. Quelle est sa dimension ?
Les vecteurs v_1 et v_2 sont non colinéaires, donc forment une famille libre dans V.
Par ailleurs, nous avons vu dans la question précédente qu'il existe une relation linéaire entre les vecteurs v_1, v_2, v_3, qui permet d'exprimer v_3 comme une combinaison linéaire de v_1 et v_2. On a alors $V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ puisque tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2 et v_3 s'écrit comme combinaison linéaire de v_1 et v_2, en remplaçant v_3 par son expression en fonction de v_1 et v_2. La famille (v_1, v_2) est donc une famille génératrice de V. Puisque c'est également une famille libre, c'est donc une base de V. Par définition de la dimension, V est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2.

(d) Trouver une base de W. Quelle est sa dimension ?

W est l'ensemble des solutions d'un système homogène échelonné (en prenant z pour première inconnue et en échangeant les deux équations) de deux équations à 4 inconnues, avec deux inconnues principales (par exemple t et z) et deux variables libres (x et y). C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4 - 2 = 2$. Pour trouver une base, il suffit de fixer deux valeurs linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^2$ pour le couple de variables libres (x, y). On peut prendre par exemple $(x, y) = (1, 0)$, ce qui donne $z = 3$ et $t = 1$ et $(x, y) = (0, 1)$, ce qui donne $z = 7$ et $t = 2$. Ainsi, si on pose $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtient une famille libre de deux vecteurs dans W (qui est de dimension 2), donc une base puisque c'est une famille libre maximale.

(e) A-t-on $V \subset W$?
On a $V = \text{Vect}(v_1, v_2)$, donc on a $V \subset W$ si et seulement si on a $v_1 \in W$ et $v_2 \in W$. Testons le vecteur v_1. Les coordonnées du vecteur v_1 satisfont à l'équation qui définit W et les coordonnées du vecteur v_2 ne satisfont pas à l'équation qui définit W. On ainsi $v_1 \in W$ mais $v_2 \notin W$, d'où l'on déduit que $V \not\subset W$.

Soit $V + W := \{v + w \mid v \in V \text{ et } w \in W\}$.

(g) Montrer que $V + W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Montrons que $V + W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels comme les parties de $\mathbb{R}^4$ qui contiennent 0 et sont stables par combinaison linéaire.

— Le vecteur $0_{\mathbb{R}^4} = 0_{\mathbb{R}^4} + 0_{\mathbb{R}^4} \in V + W$ car $0_{\mathbb{R}^4} \in V$ et $0_{\mathbb{R}^4} \in W$ puisque ce sont des sous-espaces vectoriels.

— Soient λ_1 et λ_2 deux réels et u_1 et u_2 deux vecteurs de $V + W$, avec $u_1 = v_1 + w_1 \in V + W$, avec $v_1 \in V$ et $w_1 \in W$ et $u_2 = v_2 + w_2 \in V + W$, avec $v_2 \in V$ et $w_2 \in W$. Alors on a :

$$\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 = \lambda_1(v_1 + w_1) + \lambda_2(v_2 + w_2) = (\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2) + (\lambda_1w_1 + \lambda_2w_2) = v + w \in V + W,$$

avec $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V$ et $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$ car V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donc sont stables par combinaison linéaire. Ainsi $V + W$ est stable par combinaison linéaire et contient le vecteur nul, donc est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Soit $E = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$.

(a) Montrer que E admet borne supérieure et inférieure.

L'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{R}$, car elle contient, par exemple le nombre $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Par ailleurs tout élément x de E vérifie $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{6}$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{(-1)^n}{3^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

L'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est minorée et majorée, donc (par la propriété de la borne supérieure) elle admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\frac{1}{2^n} + (-1)^n \frac{1}{3^n} > 0$ pour tout $n \geq 1$.

On va distinguer le deux cas : n pair et n impair.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, alors $\frac{1}{2^n} + (-1)^n \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} > 0$, car somme de deux nombres strictement positifs.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, alors

$$\frac{1}{2^n} + (-1)^n \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} > \frac{1}{3^n} \Leftrightarrow \frac{3^n}{2^n} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n > 1$$

Mais pour $\lambda = \frac{3}{2}$, on a bien $\lambda^n \geq \lambda > 1$ pour tout $n \geq 1$, d'où l'estimation souhaitée.

(c) En déduire que $\inf E \geq 0$.

Par le point (b), on a $\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} > 0$ et donc 0 est un minorant de l'ensemble E. Puisque $\inf(E)$ est le plus grand des minorants, on en déduit que $\inf(E) \geq 0$.

(d) Montrer que $\inf E = 0$. Cette borne est-elle atteinte ?

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel strictement positif. Par la propriété archimédienne, on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{3^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour un tel entier n, on a $0 < \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} < \varepsilon$ et donc ε n'est pas un minorant de E. On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $0 \leq \inf(E) < \varepsilon$, et donc $\inf(E) = 0$. La borne inférieure de E n'est pas atteinte car $0 \notin E$ car on a admis l'inégalité stricte $\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} > 0$ pour tout $n \geq 1$